- Geometrie non euclidee: **qual è VERA?!?**

►Geometrie non euclidee: **qual è VERA?!?**

►Certe formule ("affermazioni") sono TEOREMI in una geometria, e in altre no. Ma se il teorema NON è una affermazione sempre vera, **che cosa è allora? Dimostrabile**
Dimostrabilità ≠ verità: un teorema segue logicamente dagli assiomi (indipendentemente dal significato di "punto", "retta", "piano", …)
Significato → verità; un asserto geometrico (formula) è vero o falso soltanto in una interpretazione – assegnazione di significato ai termini primitivi.

►Geometrie non euclidee: **qual è VERA?!?**
riformulazione: di quale geometria la realtà fisica è un modello?

►Certe formule (“affermazioni”) sono TEOREMI in una geometria, e
In altre no. Ma se il teorema NON è una affermazione sempre vera,
che cosa è allora? Dimostrabilità
Dimostrabilità ≠ verità: un teorema segue logicamente dagli assiomi
(indipendentemente dal significato di “punto”, “retta”, “piano”, …)
Significato → verità; un asserto geometrico (formula) è vera o falsa
soltanto in una interpretazione – assegnazione di significato ai termini
primitivi.

►La prima vittima: l'evidenza.
Che cos’è la dimostrabilità?
La dimostrabilità prescinde dalla verità, **dunque** dal **significato**
dei termini. Struttura, scheletro formale: sintassi;
formule come **configurazioni di simboli manipolati attraverso regole**
logiche (che non hanno a che fare col significato).

Estensione alla logica (e poi all'aritmetica)
≠ da caso geometria.
Tutte le geometrie usano l'aritmetica, certo usano la logica.
Anche la logica presenta strutture formali di dimostrazione indipendenti dal significato dei simboli. (Intuizione antica: natura formale della validità logica secondo Aristotele.)

►Poincaré: tante geometrie, **una sola aritmetica**

►Poincaré: tante geometrie, **una sola aritmetica**

►Frege: comunque, **una sola logica** (“leggi del pensiero”)

►Poincaré: tante geometrie, **una sola aritmetica**

►Frege: comunque, **una sola logica** (“leggi del pensiero”)

►Ma in ogni caso, il piano della sintassi **si stacca** dal piano semantico.

E' divenuto chiaro che la dimostrabilità riguarda la pura struttura del sistema (lo scheletro).
Quel che è vero o falso non è la formula simpliciter ma la formula **interpretata**, cioè proiettata sulla realtà.

“Tutti i grubl sono bianchi”
V o F a seconda della interpretazione di “grubl”

Ma se ho “tutti i grubl sono bianchi”
e “Axel è un grubl”
posso concludere che Axel è bianco anche senza sapere che cosa sia un grubl

“tutti i grubl sono piql”
“a è un grubl”
“a è piql”

“per ogni x, se x è G allora x è P”
“a è G”
“a è P”

La verità di ciascuna è stabilita dall’interpretazione
ma
la verità della conclusione è necessaria,
***per ogni possibile interpretazione*: validità, concetto-ponte tra sintassi e semantica**

Il risultato di una dimostrazione sintatticamente corretta (***teorema***) si suppone ***valido***, cioè vero per qualunque possibile interpretazione delle variabili.

Questa proprietà (se una formula è dimostrabile allora è valida) va distinta dalla seguente proprietà fondamentale, detta ***completezza***: se una formula è valida allora essa è dimostrabile.

Bene, lo è davvero? Sono ***completi*** i sistemi logici? Per CP e FOL (vedi sotto), abbiamo dimostrazioni metamatematiche che essi lo sono; per *Principia*, abbiamo una dimostrazione fondamentale in senso contrario (Gödel 1931).

“Tutti i grubl sono bianchi”
V o F a seconda della interpretazione di “grubl”

Ma se ho “tutti i grubl sono bianchi”
e “Axel è un grubl”
posso concludere che Axel è bianco anche senza sapere che cosa sia un grubl

“tutti i grubl sono piql”
“a è un grubl”
“a è piql”

“per ogni x, se x è G allora x è P”
“a è G”
“a è P”

$$\forall x(Gx \to Px)$$

$$Ga$$

$$Pa$$

Prende corpo l'idea di studiare le strutture pure della dimostrazione, indipendenti dal significato dei simboli

Ogni dimostrazione è una successione di formule
Ogni formula è una successione di simboli logici
E' possibile esprimere in modo univoco e rigoroso le regole per manipolare simboli in modo da catturare interamente le procedure di dimostrazione?
Vale a dire, le regole grazie alle quali possiamo dimostrare (produrre, generare)

$$Pa$$

a partire da

$$\forall x(Gx \to Px)$$

$$Ga$$

- ~~Evidenza~~
- Dimostrabilità → concetto sintattico: sistema formale
- Verità → concetto semantico: *interpretazione* del sistema
- (Validità): concetto ponte

Sistema formale

Calcolo proposizionale
Logica del primo ordine
Principia Mathematica
(aritm. Peano):

def. numero; chiarimento concetti
di variabile, funzione;
riduzione della matematica alla logica
(logicismo: necessità matematica =
necessità analitica);
timore di una possibile contraddizione
latente "annidata" nella aritmetica

Group I—Axiom Schemes for Propositional Logic

$$L_1 \ : \ (F \supset (G \supset F))$$
$$L_2 \ : \ (F \supset (G \supset H)) \supset ((F \supset G) \supset (F \supset H))$$
$$L_3 \ : \ ((\sim F \supset \sim G) \supset (G \supset F))$$

Group II—Additional Axiom Schemes for First-Order Logic with Identity.

L_4: $(\forall v_i(F \supset G) \supset (\forall v_i F \supset \forall v_i G))$
L_5: $(F \supset \forall v_i F)$, provided v_i does not occur in F.
L_6: $\exists v_i(v_i = t)$, provided v_i does not occur in t.
L_7: $(v_i = t \supset (X_1 v_i X_2 \supset X_1 t X_2))$, where X_1 and X_2 are any expressions such that $X_1 v_i X_2$ is an *atomic* formula. [Alternatively, this scheme can be written as $(v_i = t \supset (Y_1 \supset Y_2))$, where Y_1 is any atomic formula, and Y_2 is obtained from Y_1 by replacing any *one* occurrence of v_i in Y_1 by the term t.]

Group III—Eleven Axiom Schemes Having Only One Axiom Apiece

$$N_1 \ : \ (v_1{}' = v_2{}' \supset v_1 = v_2)$$
$$N_2 \ : \ \sim \overline{0} = v_1'$$
$$N_3 \ : \ (v_1 + \overline{0}) = v_1$$
$$N_4 \ : \ (v_1 + v_2{}') = (v_1 + v_2)'$$
$$N_5 \ : \ (v_1 \cdot \overline{0}) = \overline{0}$$
$$N_6 \ : \ (v_1 \cdot v_2{}') = ((v_1 \cdot v_2) + v_1)$$
$$N_7 \ : \ (v_1 \leq \overline{0} \equiv v_1 = \overline{0})$$
$$N_8 \ : \ (v_1 \leq v_2{}' \equiv (v_1 \leq v_2 \vee v_1 = v_2{}'))$$
$$N_9 \ : \ ((v_1 \leq v_2) \vee (v_2 \leq v_1))$$
$$N_{10} \ : \ (v_1 \, \mathbf{E} \, \overline{0}) = \overline{0}\,'$$
$$N_{11} \ : \ (v_1 \, \mathbf{E} \, v_2{}') = ((v_1 \, \mathbf{E} \, v_2) \cdot v_1)$$

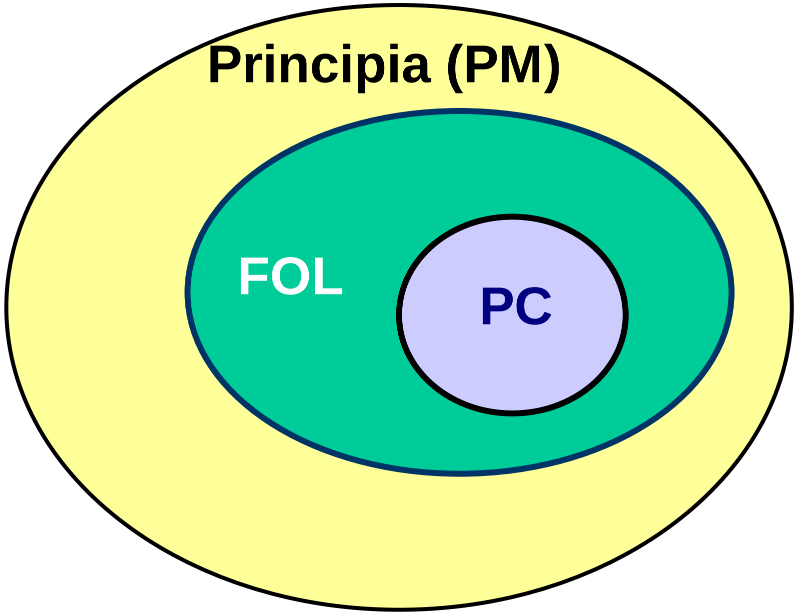
Group IV. This consists of only one axiom scheme—the scheme of mathematical induction—but infinitely many axioms, one for each formula $F(v_1)$. In displaying this scheme, $F(v_1)$ is to be any formula at all (it may contain free variables other than v_1). By $F[v_1{}']$ we shall mean *any one* of the formulas

$$\forall v_i(v_i = v_1{}' \supset \forall v_1(v_1 = v_i \supset F))$$

$$N_{12} : (F[\overline{0}] \supset (\forall v_1(F(v_1) \supset F[v_1{}']) \supset \forall v_1 F(v_1)))$$

Un esempio di sistema assiomatico sufficiente a formalizzare l'aritmetica (Smullyan).

Infiniti sistemi assiomatici sono equivalenti.



Calcolo proposizionale (enunciativo):
sistema formale fondamentale che cattura la logica (sintassi, semantica) delle deduzioni basate sulle relazioni logiche tra intere proposizioni (= unità linguistica, o informativa, che è vera o falsa; cfr. Aristotele, discorso apofantico).
P. es.:

$$\frac{\begin{array}{l} p \to q \\ p \end{array}}{q}$$

Da un punto di vista ***semantico***, ogni variabile proposizionale (enunciativa) sta per una proposizione qualsiasi, anche complessa.
Le variabili si connettono tra loro mediante connettivi logici:
negazione (connettivo unario);
congiunzione, disgiunzione, implicazione materiale, ecc. (connettivi binari). Da un punto di vista semantico, i connettivi hanno un significato (non, e, o (vel), se… allora); da un punto di vista ***sintattico***, sono segni – quasi i pezzi di un gioco.

Da un punto di vista ***semantico***, ogni variabile proposizionale (enunciativa) sta per una proposizione qualsiasi, anche complessa.

Dunque, l'***interpretazione*** consiste nell'assegnare un valore (un significato proposizionale specifico) a ogni variabile. In questo modo, ogni formula ha un valore di verità: V o F.

Tramite le ***tavole di verità***, per ogni connettivo logico possiamo calcolare il valore di verità di una proposizione complessa sulla base dei possibili valori dei suoi costituenti: p. es. "$p \rightarrow q$" – *[esempio alla lavagna]*

Da un punto di vista ***semantico***, ogni variabile proposizionale (enunciativa) sta per una proposizione qualsiasi, anche complessa.

Dunque, l'***interpretazione*** consiste nell'assegnare un valore (un significato proposizionale specifico) a ogni variabile. In questo modo, ogni formula ha un valore di verità: V o F.

Tramite le ***tavole di verità***, per ogni connettivo logico possiamo calcolare il valore di verità di una proposizione complessa sulla base dei possibili valori dei suoi costituenti: p. es. "$p \rightarrow q$" – *[esempio alla lavagna]*

Dunque, tutto ciò che conta per determinare il valore di verità di una formula complessa del calcolo proposizionale è il mero valore di verità delle proposizioni costituenti. La formula complessa è, da un punto di vista semantico, ***funzione di verità*** dei suoi costituenti.

Da un punto di vista ***semantico***, ogni variabile proposizionale (enunciativa) sta per una proposizione qualsiasi, anche complessa.
Dunque, l'***interpretazione*** consiste nell'assegnare un valore (un significato proposizionale specifico) a ogni variabile. In questo modo, ogni formula ha un valore di verità: V o F.
Tramite le ***tavole di verità***, per ogni connettivo logico possiamo calcolare il valore di verità di una proposizione complessa sulla base dei possibili valori dei suoi costituenti: p. es. "$p \rightarrow q$" – *[esempio alla lavagna]*
Dunque, tutto quello che conta per determinare il valore di verità di una formula complessa del calcolo proposizionale è il mero valore di verità delle proposizioni costituenti. La formula complessa è, da un punto di vista semantico, ***funzione di verità*** dei suoi costituenti.
Perciò, se la formula risulta V per tutte le possibili combinazioni di valori di verità dei costituenti, essa è ***valida*** (= vera per ogni interpretazione). – Non occorre considerare tutti i possibili significati.

E come si costruisce il sistema formale dal punto di vista ***sintattico***, cioè della ***dimostrazione***? Questo è vitale: infatti, per sistemi più complessi di CP, non esiste (e dimostrabilmente non ***può*** esistere) una ***procedura di decisione*** meccanica (come le tavole di verità) per la validità.

struttura di un sistema formale

vocabolario di base (vedi sopra)

regole di formazione di formule: un numero finito di regole, spesso espresse in modo ricorsivo, che permettono di decidere meccanicamente in un numero finito di passi se una certa sequenza di simboli sia una formula;

assiomi: uno tra diversi (infiniti) possibili insiemi di assiomi. Quattro o cinque assiomi sono sufficienti a formalizzare il calcolo proposizionale. In alternativa, si può rinunciare agli assiomi ed estendere le regole di derivazione (sistemi di deduzione naturale);

regole di derivazione (o di inferenza, o di deduzione): le regole che stabiliscono quali formule si possano derivare (o dedurre) da altre formule in una dimostrazione.

Formula ben formata (fbf, wff)

$$p \wedge \vee \neg \neg \neg$$

$$p \vee \neg p$$

regole di formazione semplificate di formule ben formate (fbf).

(i) “p” e “q” sono fbf;
(ii) una fbf preceduta da “¬” è una fbf;
(iii) due fbf collegate da un connettivo diadico (“V”, “→”, ecc.) sono una fbf;
(iv) una fbf racchiusa tra parentesi è una fbf;
(v) nient’altro è una fbf.

Regole ricorsive
procedura meccanica per decidere in un numero finito e prevedibile di passi se una successione di simboli di lunghezza finita sia una formula ben formata

fbf

$p \vee \neg p$ è una fbf?

(i) $"p \vee \neg p" = "p"$ o $= "q"$? no

(ii) $"p \vee \neg p" =$ fbf preceduta da $"\neg"$? no

(iii) $"p \vee \neg p" =$ due fbf collegate da $"\vee"$? Sì, sse $"p"$ e $"\neg p"$ sono fbf

$"p"$

(i) $"p" = "p"$ o $= "q"$? Sì $\Rightarrow "p"$ è fbf

$"\neg p"$

(i) $"\neg p" = "p"$ o $= "q"$? no

(ii) $"\neg p" =$ fbf preceduta da $"\neg"$? Sì, sse $"p"$ è fbf

$"p"$

(i) $"p" = "p"$ o $= "q"$? Sì $\Rightarrow "p"$ è fbf

$"\neg p"$ è fbf

$"p \vee \neg p"$ è fbf

Disponiamo a questo punto di un vocabolario e di regole di formazione che ci permettono la costruzione di infinite formule ben formate. Da qui si può procedere in diversi modi. Storicamente, si scelse la strada del sistema assiomatico rispetto ad altre equivalenti (ma vedi: deduzione naturale). Si seleziona un numero finito di formule che vengono chiamate ***assiomi***. Queste formule sono valide per definizione: i primi logici ritenevano che esse dovessero risultare immediatamente evidenti (un requisito simile a quello avanzato per gli assiomi di Euclide).

Disponiamo a questo punto di un vocabolario e di regole di formazione che ci permettono la costruzione di infinite formule ben formate. Da questo punto si può procedere in diversi modi. Storicamente, si scelse la strada del sistema assiomatico rispetto ad altre equivalenti. Si seleziona un numero finito di formule che vengono chiamate ***assiomi***. Queste formule sono valide per definizione: i primi logici ritenevano che esse dovessero risultare immediatamente evidenti (un requisito simile a quello avanzato per gli assiomi di Euclide).

Ax1: $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

Ax2: $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

Ax3: $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow p)$

(Un esempio di sistema assiomatico. Da questi assiomi, più le regole di derivazione, si possono dedurre tutti i teoremi del calcolo proposizionale – anche se, per assurdo, non si conoscesse il significato di ciò che si sta facendo (gioco).
E' un sistema utile solo per una presentazione o una breve introduzione, poco maneggevole, ma consente di ridurre il numero di regole di derivazione da memorizzare.)

Come giungiamo dagli assiomi a dimostrare tutti gli enunciati che seguono logicamente da essi (i ***teoremi***)? Tradizionalmente, la strada dagli assiomi ai teoremi, cioè la ***dimostrazione***, consiste in un certo numero di passaggi che portano da uno o più assiomi ad altri enunciati intermedi e infine al risultato desiderato. Ciascuno di questi passi viene eseguito "ragionando" in modo rigoroso, ma pur sempre utilizzando parole e modalità di ragionamento che appaiano convincenti nel linguaggio ordinario. Ma qui si pongono diversi problemi. Infatti un passaggio può apparire illusoriamente o intuitivamente valido, senza esserlo in realtà. Non solo: può accadere di fare ricorso a modalità di ragionamento non controllate: può non essere ben chiaro quali siano le assunzioni implicite che sottostanno ad un nostro passaggio argomentativo. Fin dalla fine dell'Ottocento, la logica e la matematica hanno preso un'altra strada. Visto che abbiamo un vocabolario rigorosamente definito e un insieme di formule ben formate strettamente delimitato, possiamo introdurre ***regole di derivazione*** che specifichino precisamente le mosse consentite, cioè le trasformazioni e i passaggi ammessi. Un esempio di regole di derivazione:

(R1) ***sostituzione****:* in una formula valida, possiamo sostituire ad ogni variabile un'altra fbf qualsiasi, a patto che la sostituzione avvenga uniformemente in ogni luogo ove figura la prima

(R2) ***Modus Ponens***

Una ***dimostrazione*** è tale sse:

ogni riga della dimostrazione è un assioma oppure:
essa deriva da una più delle precedenti secondo le regole di derivazione.

Una dimostrazione è dunque una successione di formule, l'ultima delle quali è il teorema.

Definizione di ***deduzione*** o ***prova*** da un insieme di premesse Σ in un linguaggio $\mathfrak{L}$: una prova della formula φ_n da un insieme di premesse Σ è una successione finita di formule φ_1 $\varphi_2 \ldots$ φ_n tali che per ogni $i \leq n$,

φ_i è un assioma (Ax1-Ax3) oppure
φ_i segue dalle precedenti sulla base delle regole di derivazione oppure
$\varphi_i \in \Sigma$

Si dice che φ_n ***segue*** dalle premesse Σ, o che

$$\Sigma \vdash \varphi_n$$

Se $\Sigma = \phi$ (cioè è vuoto) allora φ_n è un teorema, e si scrive

$$\vdash \varphi_n$$

Un esempio di prova
da AX1-AX3 provare:

$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p)$

Un esempio di prova
(da AX1-AX3)

Ax1: $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

Ax2: $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

Ax3: $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow p)$

provare:

$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p)$

(1)	$(p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p))$	Ax1, *r/p*
(2)	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	Ax2
(3)	$((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p))$	(1),(2), MP

Un esempio di prova
(da AX1-AX3)

***Ax1**:* $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

***Ax2**:* $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

***Ax3**:* $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow p)$

provare:

$p \rightarrow p$

Un esempio di prova
(da AX1-AX3)

Ax1: $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

Ax2: $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

Ax3: $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow p)$

provare:

$p \rightarrow p$

(1)	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	*Ax1*
(2)	$(p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p))$	*Ax2, r/p*
(3)	$((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p))$	*(1),(2), MP*
(4)	$((p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p))$	*(3), q/(q → p)*
(5)	$(p \rightarrow p)$	*(1),(4), MP*

Notiamo che:

(1) la prova è completamente sintattica, indipendente dal significato dei simboli (manipolazione di simboli attraverso regole);

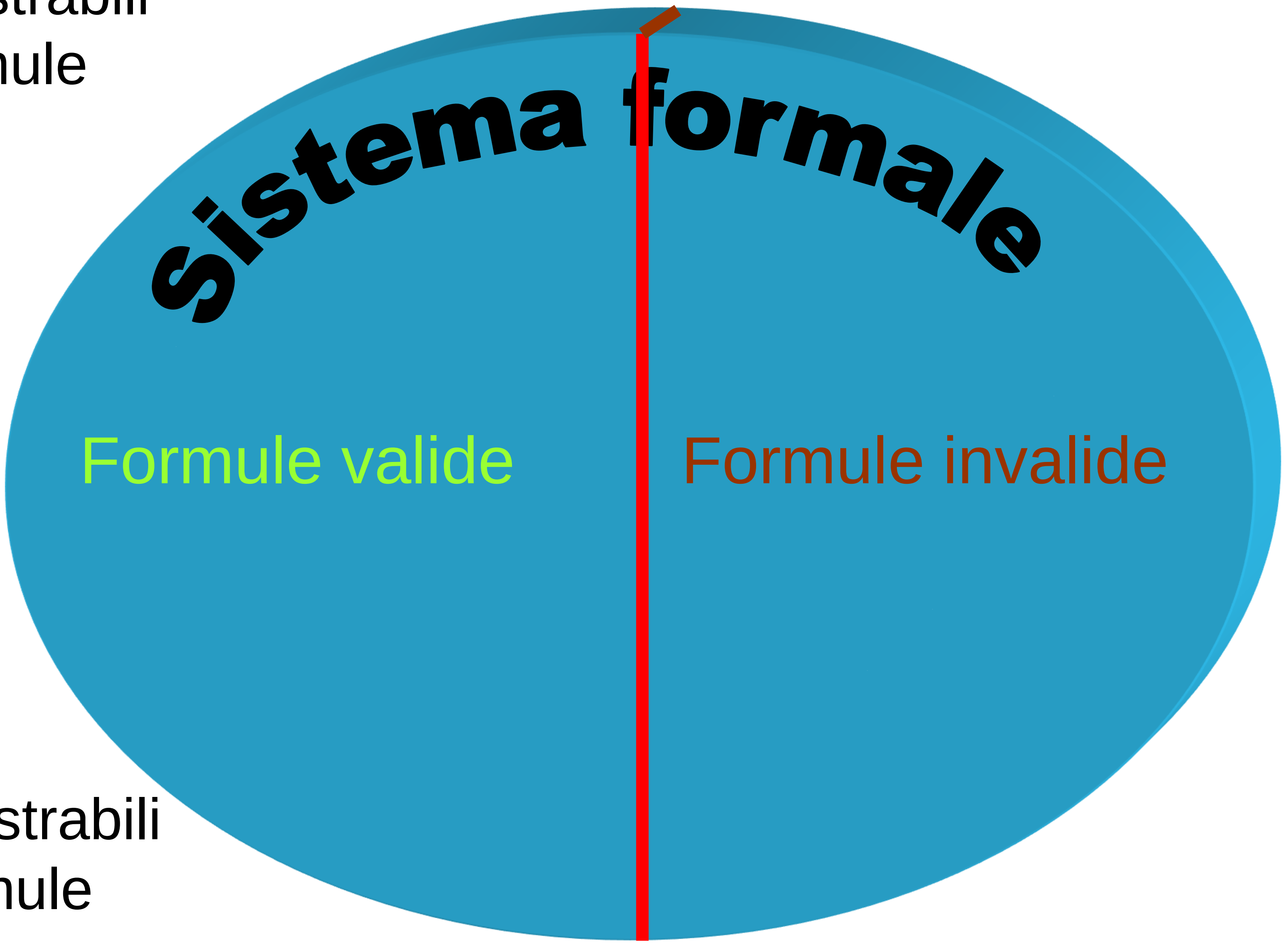
(2) è del tutto possibile verificare meccanicamente la correttezza della prova;

(3) pertanto, questo sistema formale coglie la logica (verofunzionale) del **pensiero** proposizionale in modo puramente sintattico;

(4) è possibile dimostrare (metamatematicamente) che le formule dimostrabili coincidono esattamente con le formule valide; il sistema è **completo**;

(5) non è possibile dimostrare una formula e la sua negazione: il sistema è **coerente** (noncontraddittorio, consistente).

Completezza:
Sono dimostrabili tutte le formule valide?



Coerenza:
Sono dimostrabili solo le formule valide?

Basilari proprietà metamatematiche	**PROC. DEC.**	**COMPL.**	**COER.**
Calcolo proposizionale	**SI**	**SI**	**SI**
Logica primo ordine	**NO**	**SI**	**SI**
Principia Mathematica	**NO**	**?**	**?**

Matematica, logica
perno del pensiero,
della conoscenza
Contraddizione nascosta?

Devastante, anche per l’immagine
che la mente ha di se stessa

Da una contraddizione, tutto segue (anche 3 X 7=37)

(1)	$p \wedge \neg p$	Contraddizione
(2)	p	(1), EC
(3)	$p \vee q$	(2), ID
(4)	$\neg p$	(1), EC
(5)	q	(3),(4), ED

logicismo e formalismo

la nostra logica cattura proprietà e relazioni reali? (leggi dell'esser vero)
costruite? (risultato di sintesi creative)
convenzionali? (relazioni sintattiche istituite arbitrariamente)

dobbiamo andare oltre la consueta associazione

logicismo / realismo,
formalismo / nominalismo,
intuizionismo / concettualismo.

Ciò che è in questione non è tanto la esistenza di enti matematici e logici (*platonismo* matematico) quanto la natura della validità logica: se essa catturi verità intrinseche alle relazioni tra enti logici e matematici o se invece sia un concetto puramente sintattico, che riguardi la possibilità di ottenere stringhe di simboli da altre stringhe di simboli attraverso le manipolazioni consentite dalle regole di derivazione.
Evidentemente il logicismo, mirando a fondare la matematica su verità logiche autoevidenti, inclina al platonismo ed anche all'uso di metodi infinitisti, così come l'intuizionismo porta direttamente all'antiplatonismo e al costruttivismo; il formalismo è caratterizzato dalla rigida separazione tra semantica e sintassi (verità/validità) e inclina all'antiplatonismo e verso metodi costruttivisti.

è finito

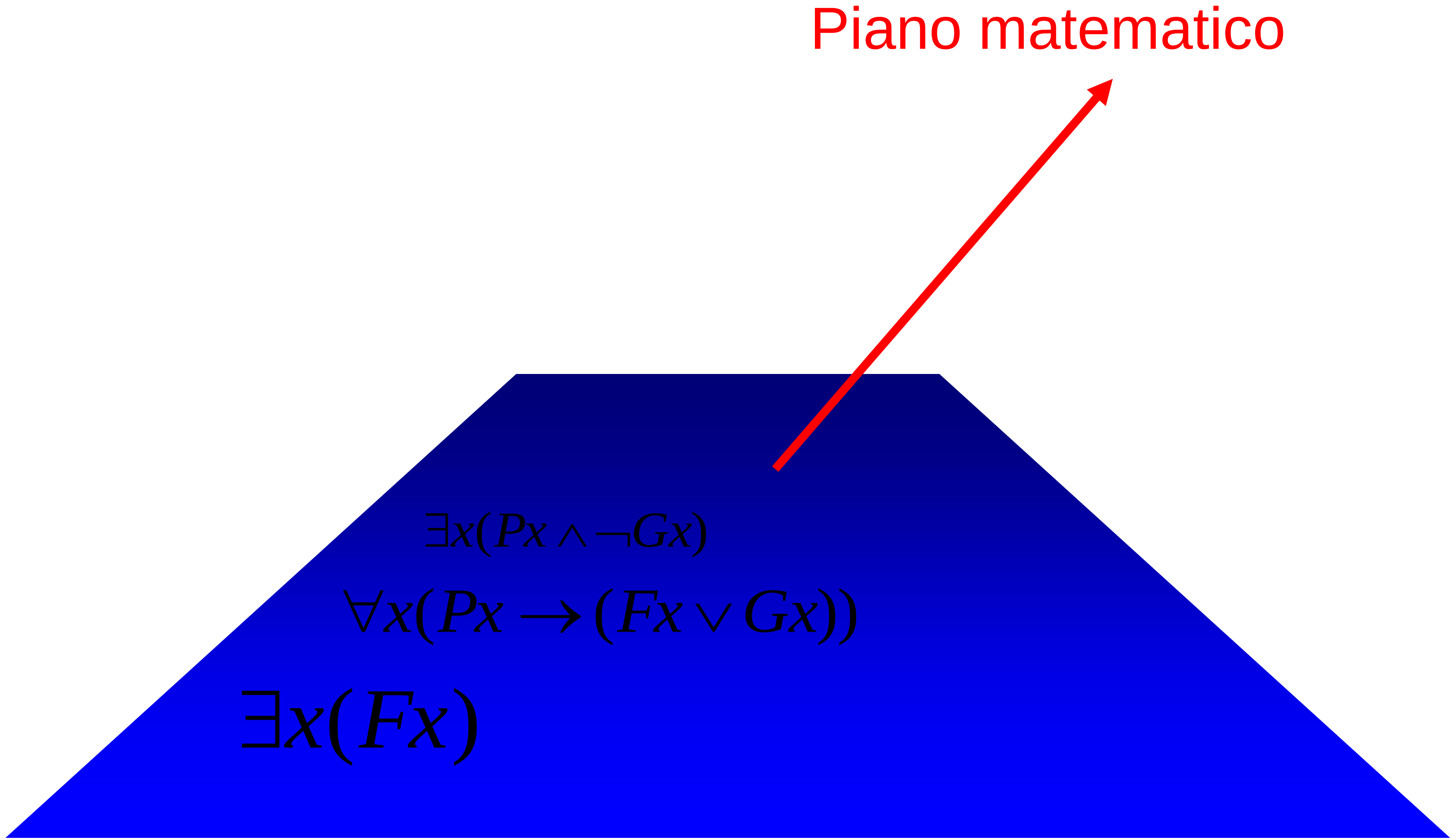
non serve andare avanti, è finito

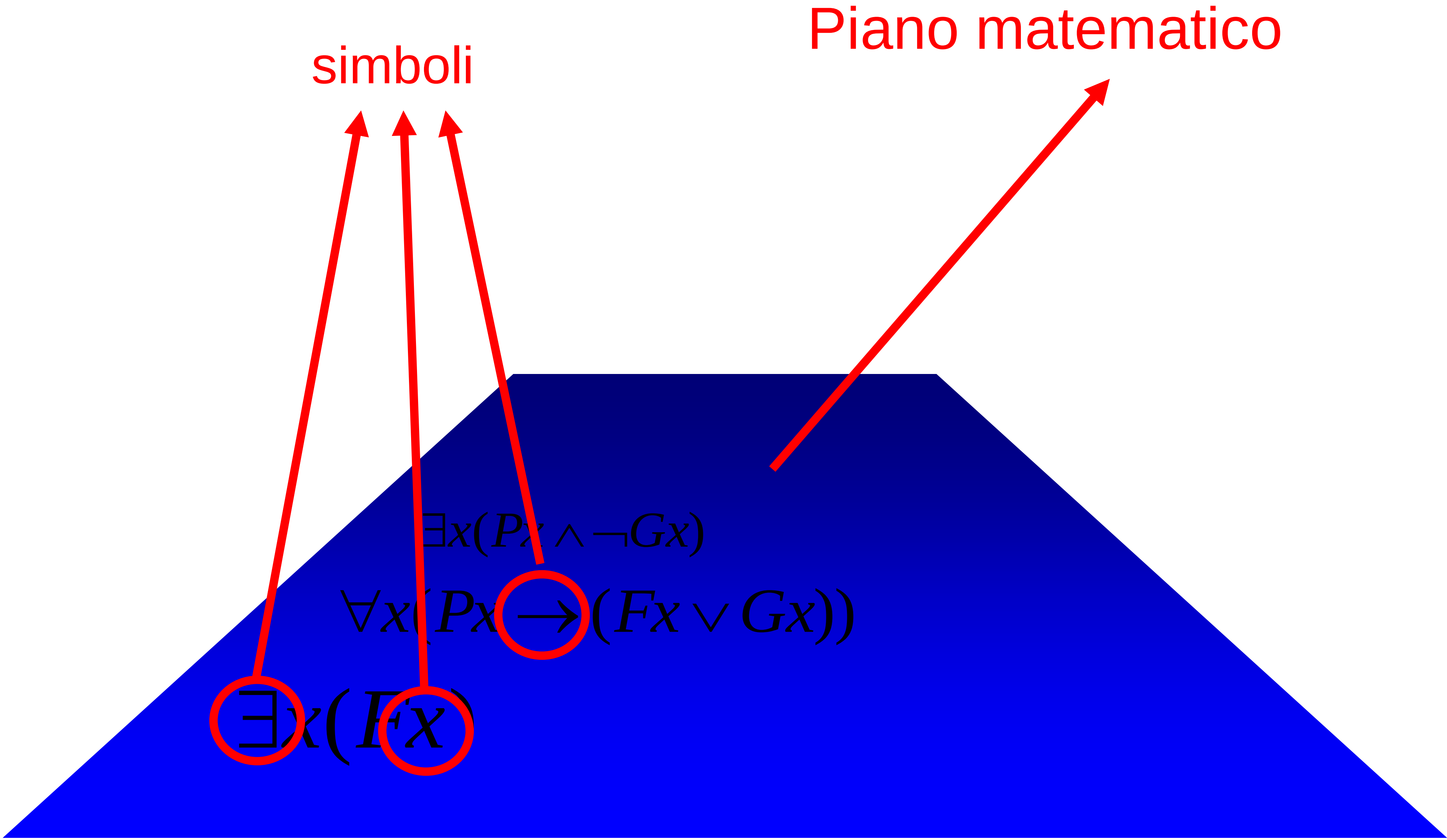
sì, sì, continua pure, hai del tempo da perdere

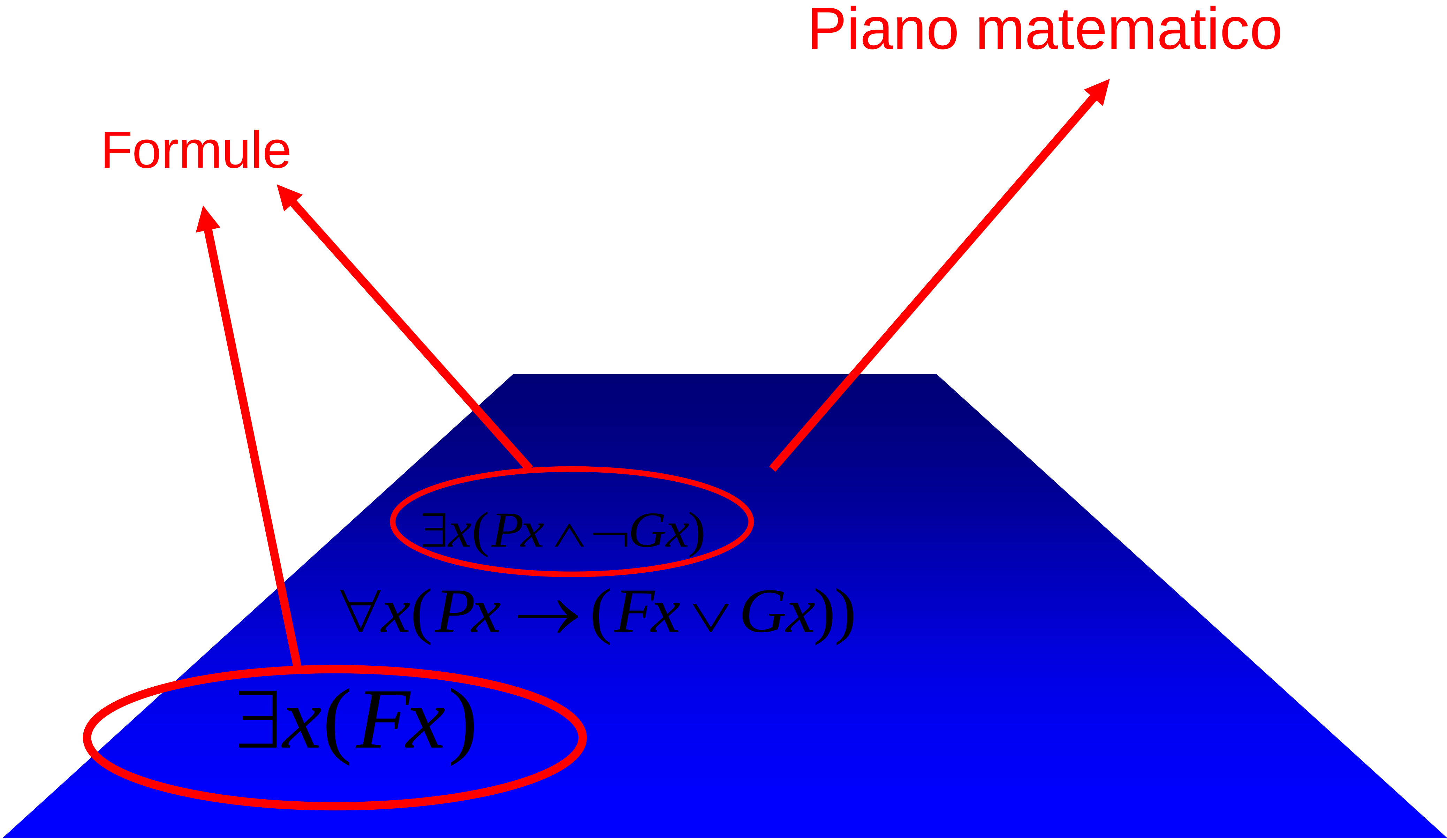
Vabbè, poi non lamentarti, te la sei voluta

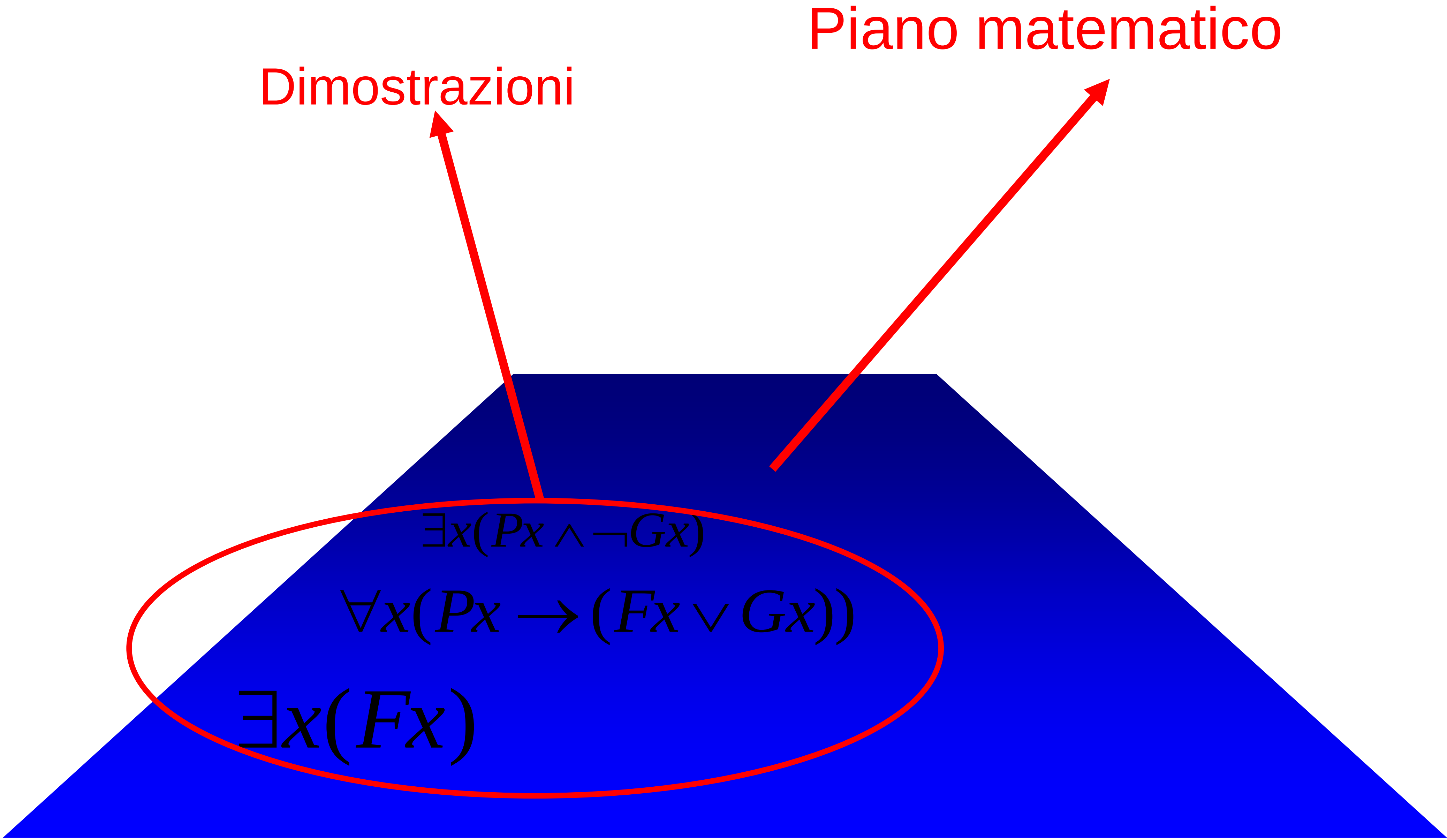
Metamatematica

Coerenza e completezza sono tipici problemi metamatematici

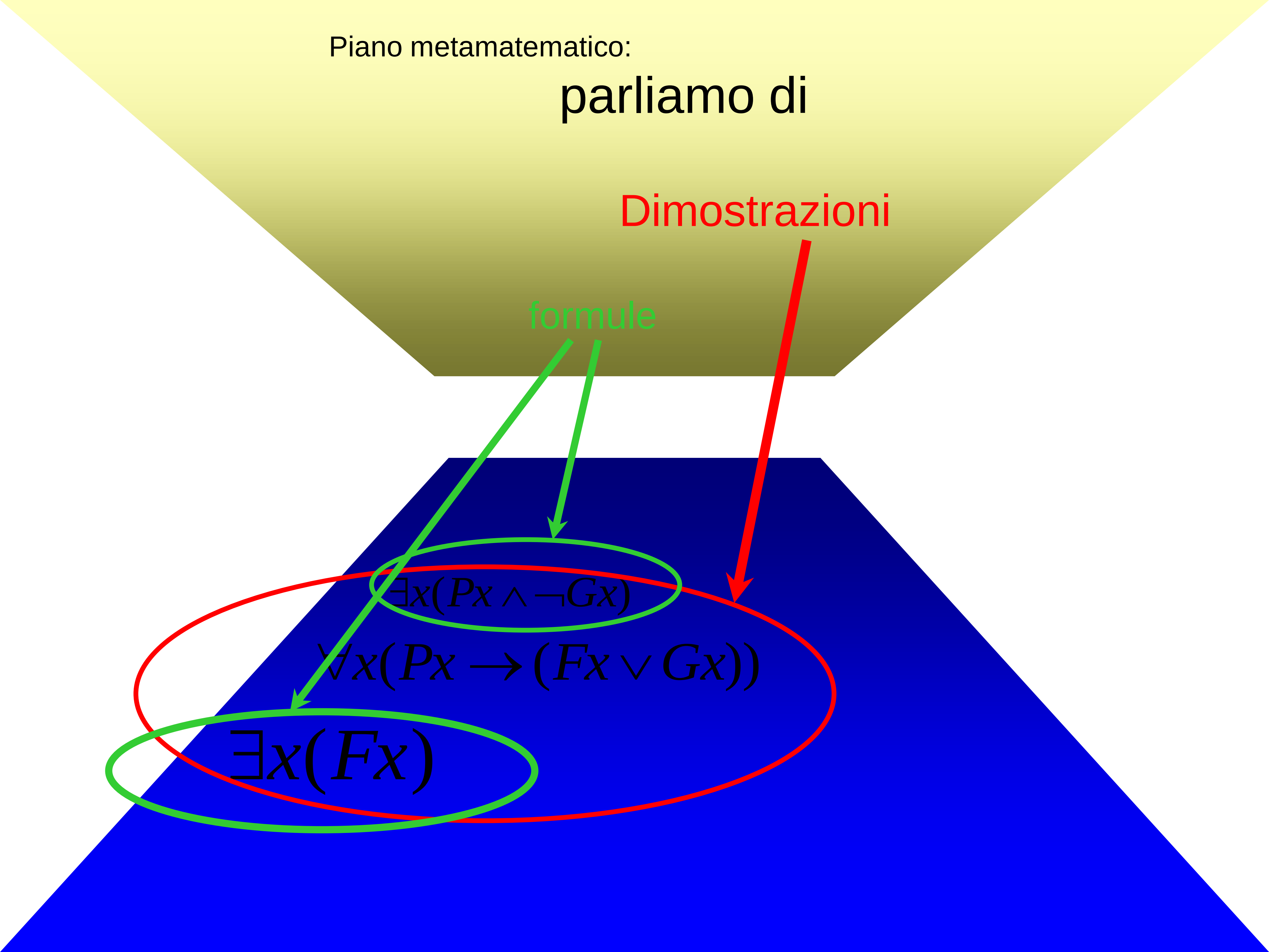

Piano matematico
$\exists x(Px \wedge \neg Gx)$
$\forall x(Px \rightarrow (Fx \vee Gx))$
$\exists x(Fx)$

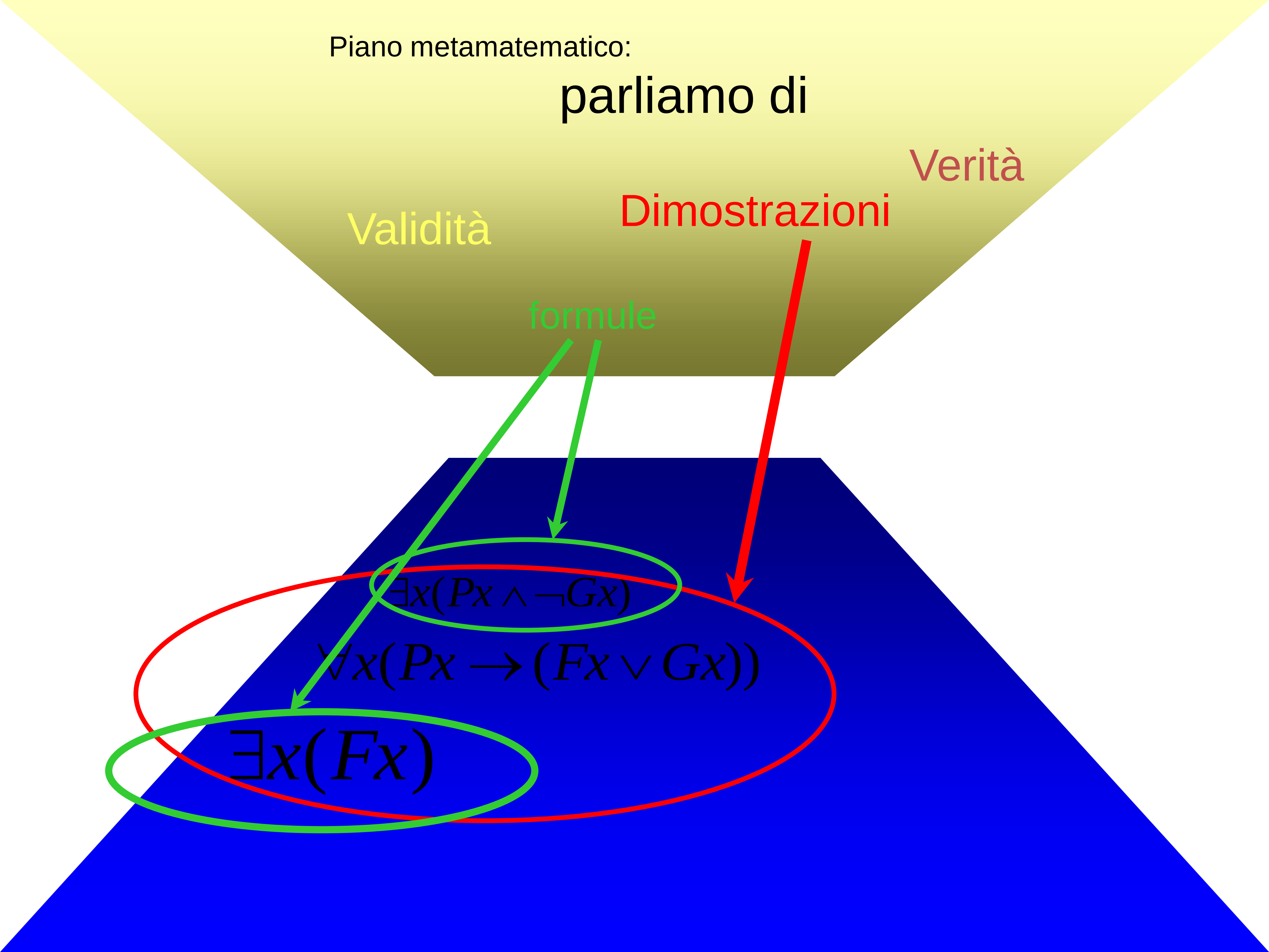

Piano matematico
simboli
$\exists x(Px \wedge \neg Gx)$
$\forall x(Px \rightarrow (Fx \vee Gx))$
$\exists x(Fx)$


Piano matematico
Formule
$\exists x(Px \wedge \neg Gx)$
$\forall x(Px \rightarrow (Fx \vee Gx))$
$\exists x(Fx)$


Piano matematico
Dimostrazioni
$\exists x(Px \wedge \neg Gx)$
$\forall x(Px \rightarrow (Fx \vee Gx))$
$\exists x(Fx)$

Ma gli osservatori che discutono e descrivono quanto accade sul piano matematico, formule e dimostrazioni, si trovano per così dire su un piano superiore, che chiamiamo "metamatematica" (= "al di sopra della matematica"); teoria della dimostrazione (proof theory) o anche, semplicemente, logica matematica


Piano metamatematico:
parliamo di
Dimostrazioni
formule
$\exists x(Px \wedge \neg Gx)$
$\forall x(Px \rightarrow (Fx \vee Gx))$
$\exists x(Fx)$


Piano metamatematico:
parliamo di
Verità
Dimostrazioni
Validità
formule
$\exists x(Px \wedge \neg Gx)$
$\forall x(Px \to (Fx \vee Gx))$
$\exists x(Fx)$

- E’ come se le formule del sistema, con le regole del sistema e le dimostrazioni, si trovassero su una scacchiera: come se le regole prescrivessero manipolazioni possibili delle configurazioni dei pezzi sulla scacchiera.

- E’ come se le formule del sistema, con le regole del sistema e le dimostrazioni, si trovassero su una scacchiera: come se le regole prescrivessero manipolazioni possibili delle configurazioni dei pezzi sulla scacchiera.
- Una mossa sulla scacchiera è parte del sistema: dire invece che quella è una mossa, o la parola “mossa” sarebbe parte dei “metascacchi”.

- E’ come se le formule del sistema, con le regole del sistema e le dimostrazioni, si trovassero su una scacchiera: come se le regole prescrivessero manipolazioni possibili delle configurazioni dei pezzi sulla scacchiera.
- Una mossa sulla scacchiera è parte del sistema: dire invece che quella è una mossa, o la parola “mossa” sarebbe parte dei “metascacchi”.
- All’interno del piano matematico si costruiscono formule, ma non si dice che siano formule, si costruiscono passaggi di teoremi; ma occorre distinguere una dimostrazione dalla affermazione che quella è una dimostrazione.

- **Musica:**
  - **una canzone**
  - **l'affermazione:**
  - **quella è una canzone**

Un’affermazione matematica è fatta nel linguaggio del sistema; di solito concerne numeri. P. es.

$$\forall x(\exists y(y > x))$$

Un'affermazione matematica è fatta nel linguaggio del sistema; di solito concerne numeri. P. es.

$$\forall x(\exists y(y > x))$$

In matematica possiamo costruire dimostrazioni: p. es. la formula appena riportata è dimostrabile in Principia.

Un’affermazione matematica è fatta nel linguaggio del sistema; di solito concerne numeri. P. es.

$$\forall x(\exists y(y > x))$$

$$\exists y(\forall x(y > x))$$

Un'affermazione matematica è fatta nel linguaggio del sistema; di solito concerne numeri. P. es.

(1) $$\forall x(\exists y(y > x))$$

(2) $$\cancel{\exists y(\forall x(y > x))}$$

(1)-(3) appartengono alla matematica, ma:
"la (1) è dimostrabile"
"la (2) è refutabile"
appartengono alla metamatematica.

(3) $$\neg\exists y(\forall x(y > x))$$

- Riassumendo
- Un'affermazione matematica è fatta nel linguaggio del sistema; di solito concerne **numeri**

- Un'affermazione metamatematica concerne **formule**

- 2+2=4

- "2+2=4" è una formula ben formata

- "2+2=4" è dimostrabile in PM

STOP

Matematica o metamatematica?

(i) 2+3=5

(ii) “2+3=5” è una formula

(iii) “2+3=5” è vera

(iv) Tutte le formule dimostrabili sono valide

(v) Ho mal di testa

(vi) $\forall x(\exists y(y > x))$

(vii) “ $\exists y(\forall x(y > x))$ ” è una formula ben formata

“è possibile dimostrare una formula φ ed anche la sua negazione?”
“è dimostrabile tutto e solo ciò che è valido?”

coerenza e completezza del sistema sono problemi metamatematici

CP e logica predicativa del primo ordine: abbiamo teoremi metamatematici di coerenza (e completezza)

Gödel dimostrò nel 1929 la completezza della logica del primo ordine (tesi dottorato)

E’ possibile che la matematica (PM) sia contraddittoria?
O incompleta?